Propuesta de enseñanza del álgebra escolar: resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Teaching Proposal of School Algebra: Resolution of Linear Equation Systems with Two Variables

**Caroline Salazar, Nezah Fuentes*
Maribel Ñanco, Marcela Agurto***

Resumen

Este trabajo gira en torno a la problemática que tienen los estudiantes al resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas aplicando diversos métodos de resolución. En cuanto a la interpretación y uso dado a los valores obtenidos, se identifica que las ecuaciones lineales por sí solas se transforman en obstáculo, ya que impiden la comprensión de lo antes mencionado. Para salvar este obstáculo, para resolver sistemas de ecuaciones se propone la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval, ya que se suelen pasar por alto las complicaciones de la operación de conversión de registros sin asociar los elementos que se relacionan.

Palabras clave: propuesta didáctica, pensamiento algebraico, escolar.

Abstract

This article deals with the students problematic when solving systems of linear equations with two variables by applying different resolution methods. Concerning the interpretation and use of the obtained results, it is identified that linear equations by themselves become an obstacle, because they make difficult the comprehension of the foregoing. To overcome this obstacle, for the resolution of equation systems, the Raymond Duval's theory of semiotic representations is proposed, because the complications of the register conversion operation are overlooked, without associating the related elements.

Keywords: didactic proposal, algebraic thought, school-related.

* Estudiantes de Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad de las Américas, Chile.

1 Introducción

A la conversión de un registro en otro se le otorga una importancia insustancial; sin embargo, se ha documentado que, en el álgebra lineal, la conversión entre registros desempeña un papel central en el aprendizaje, y las conversiones que involucran al registro simbólico resultan de mayor dificultad. Tomando en cuenta documentos de apoyo relacionados con el tema de este trabajo, se consideran ciertos aspectos para el diseño de una secuencia didáctica que busca que el estudiante se apropie del conocimiento. Para lograr este objetivo, se propone que el alumno trabaje diferentes registros: natural, gráfico, algebraico y aplicación. A su vez, la estrategia principal es que el conocimiento se obtenga por descubrimiento guiado.

Desde nuestra perspectiva pensamos que es importante utilizar diferentes situaciones que involucren el contenido y creemos que existen diferentes medios para adquirir un conocimiento; también consideramos que involucrar más de un medio enriquece el aprendizaje significativo y, aunque el proceso algebraico ha tenido prioridad en los últimos años, es bien sabido que por sí solo no es suficiente, por lo menos en lo que se refiere a la enseñanza-aprendizaje. Con esto no se quiere decir que debamos dejar a un lado lo algorítmico: se trata más bien de que el alumno interactúe con los diferentes lenguajes matemáticos para así construir su propio saber matemático. Con estas situaciones didácticas se espera favorecer el aprendizaje significativo, con el propósito de incidir positivamente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

2 Antecedentes del origen y evolución del concepto matemático

El análisis o investigación de un objeto es necesario para el desarrollo de situaciones que lo involucren y, por lo tanto, es de gran importancia saber su evolución histórica, ya que muestra los diversos obstáculos en el desenvolvimiento del objeto. El estudio histórico de igual manera da pautas sobre las construcciones de los algoritmos que hoy son enseñados generalmente sin justificación. Realizando un recorrido por la cronología, los primeros rudimentos de lo que hoy conocemos como sistemas de ecuaciones —según un estudio realizado en el Instituto Tecnológico de Monterrey, *Métodos numéricos y álgebra lineal: Los sistemas de ecuaciones lineales* (NGJ/v06, serie CB00851)— fueron ya resueltos por los babilonios, quienes llamaban a las incógnitas con palabras como 'longitud', 'anchura', 'área' o 'volumen', sin que tuvieran relación con problemas de medida. Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica (Colette, 1986) plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

¼ anchura + longitud = 7 manos

longitud + anchura = 10 manos

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: anchura = 20, longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación es:

$y + 4x = 28$

$y + x = 10$

Restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir, $x = 6$ e $y = 4$.

En el recorrido donde se analiza el objeto matemático en cuestión aparecen otros documentos descritos brevemente en el artículo *Historia y desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales* (Ramírez, 2013), donde se habla nuevamente de los babilonios y de otras etnias que han hecho su aporte o se han involucrado en el trabajo y desarrollo de los sistemas de ecuaciones.

El mayor número de documentos de los babilonios corresponde al periodo comprendido entre los años 600 a. C. y 300 d. C. Ellos casi no les prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizás por considerarlas demasiado elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado (Ramírez, 2013). Los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhind —1650 a. C.— y el de Moscú —1850 a. C.—) una multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refiere a ningún objeto concreto. En estos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones (Ramírez, 2013). Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diofanto (250 d. C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era mayor por la geometría. Sobre la vida de Diofanto aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal. Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de ecuaciones con n incógnitas. Diofanto resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal (Ramírez, 2013). Diofanto solo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada como hemos señalado anteriormente. Sin embargo, unas de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diofanto es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos (Ramírez, 2013).

3 Dificultades en el aprendizaje del objeto a enseñar

Obstáculo n.º 1: ecuaciones lineales

En el artículo de Mabel Panizza (1999) se encuentran las siguientes evidencias:

Clasificación: epistemológico, ya que con base en la definición del objeto matemático surgen los errores en los estudiantes.

Evidencias: todos los estudiantes entrevistados resolvieron los sistemas propuestos correctamente. El primer sistema que se les presentó fue:

$4x = 3y + 8$

$x + y = 2$, cuya solución es el par $2,0$.

Ellos explicaron que un par de números es la solución del sistema si verifica cada una de las ecuaciones.

Sin embargo, cuando les preguntamos si la solución del sistema que ellos habían obtenido era una solución de la ecuación $4x = 3y + 8$ —considerada esta aislada del sistema—, ellos dijeron que no.

(E= entrevistadora; R= Rodolfo; D= Daniel)

Entrevista:

E: —¿Este par (el 2,0, solución del sistema) es solución de esta ecuación?

R: —No, de las dos.

D: —De las dos juntas, porque es un sistema.

E: —Ajá. Y ustedes, antes, ¿cómo habían hecho para saber que el 5,4 es solución de la de arriba?

R: —Reemplazando.

E: —Y quieren probar si el 2,0 es solución de la de arriba.

D: —No va a dar.

Todo ocurre como si los estudiantes pensaran que, en tanto el par 2,0 fue una solución obtenida manipulando las dos ecuaciones, no podría seguir siendo solución cuando desapareciera una de las ecuaciones que intervino en el proceso de obtención.

Frente a una explicación del entrevistador, Daniel y Rodolfo parecen aceptar finalmente que el par 2,0 es solución de la primera ecuación. Sin embargo, esta aceptación es solo transitoria: cuando se los enfrenta a un nuevo sistema de ecuaciones en el que sigue apareciendo la ecuación $4x = 3y + 8$ y se les pregunta si el par 2,0 es solución de esta, ellos dicen que no, “porque ya no está esta ecuación” ($x + y = 2$, la segunda ecuación del primer sistema tratado).

Este resultado mostraría que, desde la perspectiva de los chicos, *la ecuación con dos variables en un sistema* es un objeto diferente de *una ecuación con dos variables*.

Desde ese punto de vista, no tiene por qué haber relación entre la solución de la ecuación obtenida a partir del sistema y la solución de la ecuación aislada de este.

Evidentemente, este hecho refuta el supuesto en el cual nos habíamos apoyado para pretender provocar desequilibrio en los alumnos al introducir una nueva solución de la ecuación “de la mano” de un sistema. (Panizza, Sessa, y Sadovsky; 1999).

4 Justificación de la propuesta

Una ecuación puede contener una, dos o más incógnitas, es decir, varios números distintos que se complementan, pero se sabe que a las incógnitas se les puede designar diversos valores y estas pueden tener infinitas soluciones. Cuando se forma un sistema de ecuaciones, es decir, dos o más ecuaciones, los valores satisfacen las mismas incógnitas y, por lo tanto, el sistema puede tener una solución o no tener solución (sistema de ecuación no compatible). Para el estudiante, a veces es un obstáculo poder comprender que, por una parte, una ecuación con dos incógnitas posee infinitas soluciones y, por otra, dentro de un sistema de ecuaciones también forma parte de las soluciones por cada ecuación. Al proponer esta actividad se quiere obtener varios objetivos por ítems y en progreso. Primero, cuando se comienza en el ítem 1, se los ayuda con los valores que puede tener ***x***, donde el par ordenado que obtengan como resultado lo podrán utilizar a medida que vayan avanzando en la guía.

También se quiere que los estudiantes, antes de llegar al registro algebraico y gráfico, puedan observar —en el plano cartesiano que ellos mismos confeccionarán— las soluciones que pueden seguir siendo más de las que logran sacar al reemplazar los valores de ***x***. En el siguiente ítem ya se introduce el concepto de sistema de ecuaciones, al contener las ecuaciones del ítem 1 con otras (figura 1), que son pares ordenados ya sacados de los primeros ítems. Se les solicita responder respecto de la presentación y destacar la intersección que se ha generado. Este ítem otorgaría el paso a la institucionalización del concepto. En el ítem 2 (figura 2), se quiere lograr que ellos también comprendan que existen sistemas de ecuaciones no compatibles, es decir, que no poseen un par ordenado en común al comparar una ecuación que satisface dos sistemas diferentes. Se ve que uno de los sistemas tiene solución, y el otro, no. Por última instancia se les pregunta a los estudiantes por el/los par/es ordenado/s que consideren que posee/n una solución con la ayuda del anexo 1 (método de sustitución).

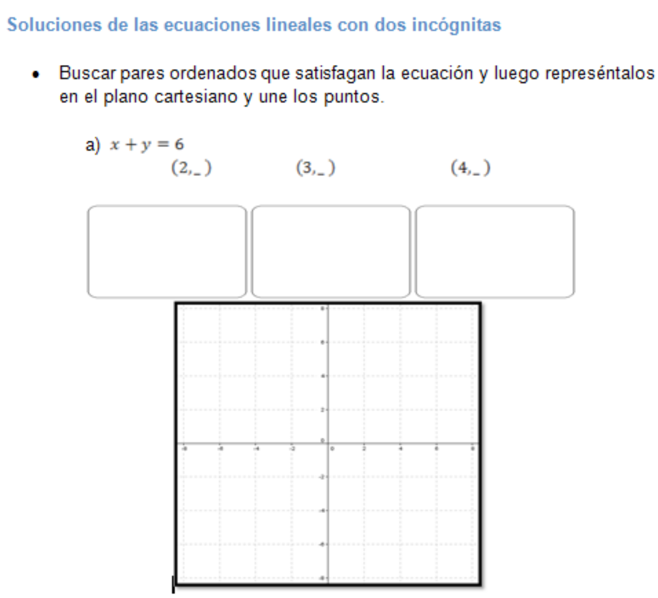
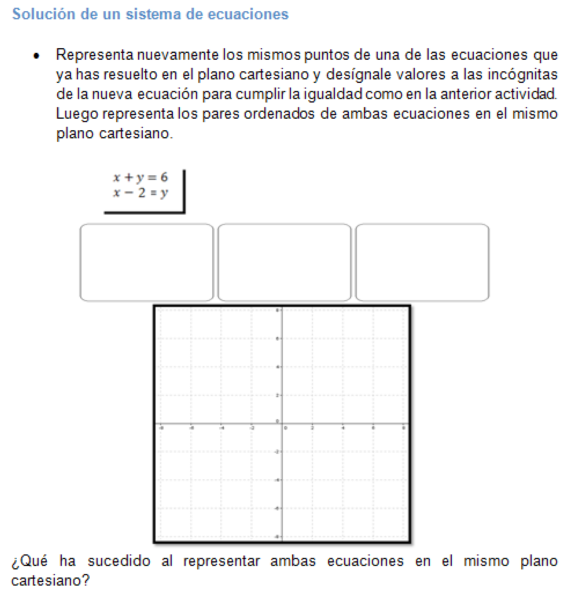


Figura 1. Ítem 1, propuesta didáctica


Solución de un sistema de ecuaciones

- Representa nuevamente los mismos puntos de una de las ecuaciones que ya has resuelto en el plano cartesiano y desígnale valores a las incógnitas de la nueva ecuación para cumplir la igualdad como en la anterior actividad. Luego representa los pares ordenados de ambas ecuaciones en el mismo plano cartesiano.

$x + y = 6$
$x - 2 = y$

¿Qué ha sucedido al representar ambas ecuaciones en el mismo plano cartesiano?

Figura 2. Ítem 2, propuesta didáctica

5 Conclusiones

Los sistemas de ecuaciones lineales son una operación que busca una solución que compartan las ecuaciones bajo todos los criterios que este sistema pueda tomar. No obstante, aquello provoca una confusión en las soluciones de la ecuación lineal con dos incógnitas, ya que el resultado del sistema se considera como lo antes mencionado y no se logra identificar que aquellos valores (resultado de x e y) son un par de la solución del sistema con dos incógnitas. Sin embargo, la propuesta de enseñanza diseñada para aquella dificultad toma en consideración que el problema proviene desde la identificación de la ecuación lineal con dos incógnitas (sus soluciones particulares), y se comienza por cubrir aquello realizando ejercicios de identificación de soluciones. Otra dificultad que se presenta en esta operación son las transformaciones que se realizan en los distintos tipos de registros, es decir, no se logra hacer una conversión entre ellos, lo que dificulta aún más el tratamiento que se debe realizar en la transformación. No se logra realizar la conversión entre el lenguaje natural al algebraico y del algebraico al gráfico, donde una de las causas identificadas es que los textos escolares y algunos profesores no realizan estas transformaciones en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones, sino que se enfocan solo en los métodos de resolución, lo que corresponde al tratamiento del registro algebraico. También no existe conciencia de que este contenido corresponde a la introducción al álgebra lineal, y se enseña solo como un contenido de álgebra I.

Referencias bibliográficas

Colette, J. (1986). *Historia de las matemáticas (2.ª ed.).* México: Siglo xxi editores.

De Herrero. (2004). "Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica". *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(1), pp. 49 78.

Instituto Tecnológico de Monterrey. (2004). *Métodos numéricos y álgebra lineal. Sistemas de ecuaciones lineales.*

— *Métodos numéricos y álgebra lineal: Los sistemas de ecuaciones lineales* (NGJ/v06, serie CB00851)

MINEDUC (2011). Programas de Matemática de 7.º básico y 2.º medio. Actualización 2009. Chile.

— (2012). Programas de Matemática de 5.º y 6.º básico. Actualización 2012. Chile.

Panizza, Sessa y Sadovsky. (1999). "La ecuación lineal con dos variables", en *Enseñanza de las ciencias*, 17, pp. 453-461.

Ramírez, U. (2013). *Historia y desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales.*

Sistema de ecuaciones algebraicas. (2015). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. [Fecha de consulta: 16 de septiembre de 2015].

Sistema de ecuaciones lineales. (2015). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. [Fecha de consulta: 16 de septiembre de 2015].

Zañartu, Arrigrandi y Ramos. (2013). *Texto del estudiante 2.º medio* (4.ª ed., p. 272). Santiago: Santillana del Pacifico.