

# Modelación matemática escolar como proceso de enseñanza de la función lineal. Aplicación en variados contextos y diversos sistemas de representación

School Mathematics Modelling as a Teaching Process of Linear Function. Application within Several Frameworks and Diverse Representation Systems

Denisse Guzmán Guzmán\*  
Luis Vega Bahamondes\*\*

## Resumen

Actualmente, una de las habilidades a las que se les da más énfasis es la modelación, tanto en el currículum como en la utilización de esta como una herramienta de mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por eso, esta investigación se basa en una secuencia didáctica llevada al aula, donde se hizo pasar a un grupo de estudiantes por un proceso de modelación de una situación cotidiana utilizando la función lineal vista desde diversos sistemas de representación. Todo esto enmarcado en la metodología de la ingeniería didáctica, con el fin de obtener conclusiones sobre cómo la modelación afecta el proceso y permite lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje más eficaz.

**Palabras clave:** modelación, función lineal, representaciones, secuencia didáctica.

## Abstract

Today, one of the skills where more emphasis is placed on is modelling, both in the curriculum and in the use of it as a tool to improve the teaching-learning process. For this reason, this research is based on a didactic sequence applied in the classroom, where a group of students were asked to model a quotidian situation

\* Egresada de Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad de las Américas, Campus Providencia. Correo electrónico: [denisseguzmang@gmail.com](mailto:denisseguzmang@gmail.com).

\*\* Egresado de Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad de las Américas, Campus Providencia. Correo electrónico: [luisvegab@live.cl](mailto:luisvegab@live.cl).

by using the linear function from several representation systems. All this within the framework of methodology of didactic engineering, with a view to obtain conclusions on how modelling affects the process and allows to achieve a more efficient teaching-learning process.

**Keywords:** modelling, linear function, representations, didactic sequence.

## 1 Antecedentes y problemática

En las aulas es común tener conflictos al momento de enseñar la función lineal debido a su grado de abstracción y a cómo los docentes logran abordar este contenido, ya sea de manera eficaz o no para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, sabemos que, como docentes, la enseñanza en las aulas ya no es solo del contenido, sino que también debemos incluir el desarrollo de las habilidades y las actitudes. Por eso, el fin de esta investigación es ver cómo con la utilización de la modelación como herramienta del proceso de enseñanza aprendizaje y el uso de diversos tipos de representación se logra un proceso más eficaz cuando se enseña la función lineal como modelo de un fenómeno cotidiano en diversos contextos.

## 2 Preguntas de investigación y objetivos

Para poder orientar esta investigación se plantea la siguiente interrogante: ¿es posible mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la función lineal utilizando la modelación como metodología de enseñanza y sus distintas representaciones para su aprehensión? Es esta pregunta la que enmarca los objetivos específicos de esta investigación, donde se destaca la realización de un análisis, histórico, curricular y didáctico de la función lineal y la modelación, con el fin de diseñar una secuencia didáctica y poder aplicarla en el sistema escolar y, así, analizar posteriormente los resultados y beneficios de la utilización de la modelación al momento de enseñar la función lineal.

## 3 Antecedentes teóricos

Esta investigación se fundamenta en la propuesta y definición de modelación de Bassanazi y Biembengut (1997), quienes la ven como una herramienta que permite mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje para poder comprender con más profundidad un fenómeno cotidiano. Este proceso de modelación está basado en ciertos pasos que deben seguir los estudiantes para poder construir el aprendizaje; entre estos se destaca elegir el tema, investigar sobre este, realizarse preguntas, elaborar problemas de interés común, sistematizar y utilizar las estructuras matemáticas previas para dar solución a los problemas, interpretar y, fi-

nalmente, validar los modelos de forma colectiva. Otra arista de esta investigación son los sistemas de representación semiótica de Reymond Duval (1998). Es con esta teoría que se pretende lograr la aprehensión del objeto, con sus distintas representaciones, en distintos registros. Desde aquí, Duval reconoce tres actividades: la formación, que es la creación de una representación del objeto; el tratamiento, que es la habilidad de transformar el objeto dentro del mismo registro; y la conversión, que consiste en transformar el objeto con el fin de hacer una representación en otro registro. Con esto, el estudiante logra desarrollar la idea del objeto, su utilización y lo comprende de mejor manera según su tipo de aprendizaje. Díaz y Pérez (2016) manifiestan que las gráficas son curricularmente abordadas en el penúltimo nivel de primaria en el eje temático denominado *álgebra y funciones*, pero sin asociarlas explícitamente al concepto de función.

## 4 Análisis epistemológico

El desarrollo de la función lineal en el tiempo se inició con la representación gráfica de Nicolás Oresme en el siglo XIV, quien utilizó la función lineal con el fin de analizar la velocidad, pero esto solamente de forma gráfica. Luego con Descartes en 1637 y el comienzo de la geometría analítica, se estableció que toda gráfica estaba sujeta a una fórmula que la represente y viceversa. Además de esto, Descartes fue el primero en representar una variable independiente como  $x$  y una dependiente como  $y$ . Pero no fue hasta el siglo XVII que Fermat estableciera lo que hoy llamamos la forma principal de la función lineal  $y = mx + b$ , utilizando longitudes como demostración, desde un triángulo. Por otro lado, está la epistemología desde la modelación, ya que, a pesar de que la modelación en el sistema escolar —por ejemplo— es relativamente nuevo, esta habilidad se ha encontrado dentro de la matemática desde sus inicios: desde que Tales (IV a. C.) intentara medir la pirámide de Keops con trazos proporcionales, la matematización de situaciones cotidianas, poder darle explicación a lo que nos rodea, es algo habitual. Con el paso del tiempo solo han variado sus distintos significados, pero su fin siempre es el mismo: lograr entregar estructuras matemáticas que permitan comprender situaciones cotidianas, es decir, matematizar situaciones de la vida diaria.

## 5 Análisis didáctico

Podemos separar el análisis didáctico en tres aristas: análisis curricular, texto escolar y formal.

### 5.1 Curricular

La función lineal se encuentra presente en dos cursos: según la actualización del año 2016, este contenido se enseña en 8.º básico, y el aprendizaje esperado consiste en comprender la función lineal por medio de

la utilización de tablas, reglas entre  $x$  e  $y$ , y la modelación de situaciones de la vida cotidiana. Dentro de los programas antiguos, podemos encontrar la función lineal en 1.º medio: aquí, los aprendizajes esperados nos hablan de poder diferenciar la función lineal y afín, organizar pares ordenados, reconocer esta función como un caso de proporción directa y general gráficos.

## 5.2 Texto escolar

En cuanto a los textos escolares —tomando como base el texto escolar de Editorial SM, Matemática 1.º medio 2016—, hay una estructuración por pasos donde los estudiantes, mediante un experimento —Ley de Hooke—, logran modelar utilizando la función lineal, identificando la relación de dependencia, modelando la situación, construyendo tablas, estableciendo pares ordenados y graficándolos, para finalmente institucionalizar el contenido.

## 5.3 Texto formal

Finalmente, en lo que se refiere a la formalidad, la función lineal como objeto matemático tiene características muy particulares. La definición que guía este trabajo es la del texto de Serge Lang, *Cálculo 1*:

“Uno de los tipos más fundamentales de función es aquel cuya gráfica representa una línea recta. Ya hemos visto que la gráfica de la función  $f(x) = x$  es una línea recta. Si notamos  $f(x) = 2x$ , entonces la recta sube mucho más rápidamente y aún más para, por ejemplo,  $f(x) = 3x$ . La gráfica de la función  $f(x) = 10\,000x$  nos parecería casi vertical. En general, si  $a$  es un número positivo, entonces la gráfica de la función  $f(x) = ax$  representará una línea recta. Aquí se define como función lineal solo a las rectas que tienen como coeficiente de posición el  $0$ ”. (Lang, *Cálculo 1*)

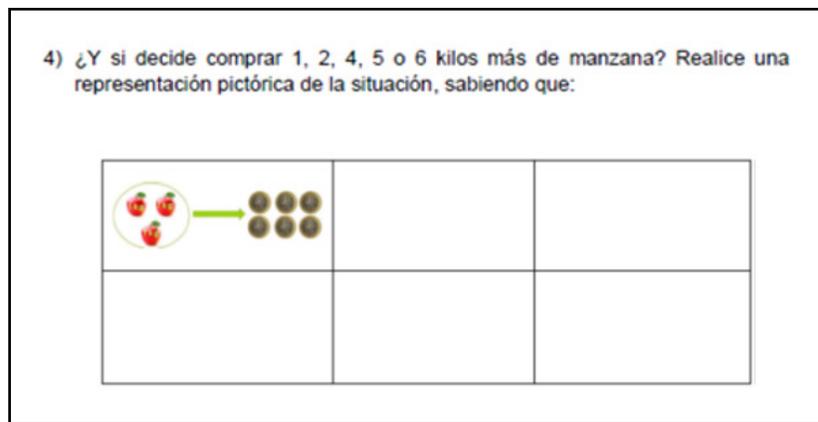
## 6 Propuesta de secuencia

La secuencia tiene como fin poder enseñar la función lineal y está constituida de dos partes. En la primera, los alumnos podrán crear un modelo desde una situación dada, cotidiana, y podrán llevar este modelo a una forma algebraica, gráfica, pictórica y tabular, siempre en relación con el fenómeno. Por esto, la secuencia se enmarca primero que todo en una situación:

*“María es una dueña de casa de la comuna de Puente Alto. María tiene un nieto llamado Pedro, quien durante toda la semana ha estado pidiendo que le haga una tartaleta de manzana. María tiene pensado darle en el gusto a su nieto. A pocas cuadras de su casa, los días viernes, se ubica*

*una feria, donde ella compra las frutas y verduras para la semana. Llegado ese día, María se dirige a la feria, donde encuentra un puesto con manzanas a muy bajo precio con el siguiente cartel”.*

Desde este fenómeno se comienza la actividad, partiendo por reconocer las variables y determinar cuál es la relación o dependencia entre ellas para que puedan asociar la función lineal con la proporción directa y así poder crear aprendizajes significativos. Luego de esto, la situación nos da pie para poder hacer cálculos y comenzar a crear el modelo que represente esta situación. Primero se les pide poder realizar una representación pictórica de la situación (fig. 1):



**Figura 1.** Actividad 4: secuencia didáctica

Luego, con esta misma representación, deben poder realizar una tabla de pares ordenados, con el fin de llevarlos a una gráfica y desarrollar diversas representaciones. Posteriormente se les hará tres preguntas, con el fin de que puedan encontrar la función lineal de la forma algebraica para luego utilizarla para resolver más preguntas: 1) “¿Cómo varía el costo total de cada compra según la cantidad de kilos de manzana? ¿Qué se puede observar respecto a la variación en el total de las distintas compras? Justifica tu respuesta”; 2) “María se pregunta si existirá una forma de calcular el costo total de cualquier cantidad de kilos de manzanas. Suponiendo que los kilos de manzana son  $m$  kilos, ¿cómo calcularíamos su costo? Justifica tu respuesta”; 3) “Y si asociamos la letra  $x$  al número de kilos de manzana que se compran e  $y$  al costo de la compra, ¿cómo quedaría esta fórmula?”. Finalmente, el segundo ítem invita al alumno a crear él mismo una situación cotidiana que se pueda ajustar a una tabla de pares ordenados con el fin de establecer preguntas, un gráfico y una forma algebraica para el modelo. Con esto, se pretende que los alumnos puedan desarrollar el contenido y hacerlo más suyo. Así, logran el proceso de modelación.

## 7 Experimentación y análisis del conjunto de datos recolectados

La experimentación se realizó en el Colegio Santiago Pudahuel, con treinta y nueve alumnos pertenecientes a segundo medio; se organizaron 13 grupos de 3 estudiantes para realizar la secuencia propuesta. Para analizar el conjunto de los datos recolectados se desglosará la matriz pregunta por pregunta identificando las posibles dificultades. En la pregunta cuatro se apreció que todos lograron lo que se les estaba solicitando en la pregunta, pero cabe destacar estos dos grupos A, de la figura 2, y B, de la figura 3, que superaron nuestras expectativas; sin embargo, lo que más llama la atención es que se puede decir que fácilmente el grupo B tiene mayor nivel cognitivo que el grupo A, ya que el grupo A al agregar el signo + hace llamado a lo simbólico; en cambio, el grupo B sabe que está trabajando con dinero de verdad y asume que no es necesario agregar el signo de adición para tener la cantidad necesaria a pagar.

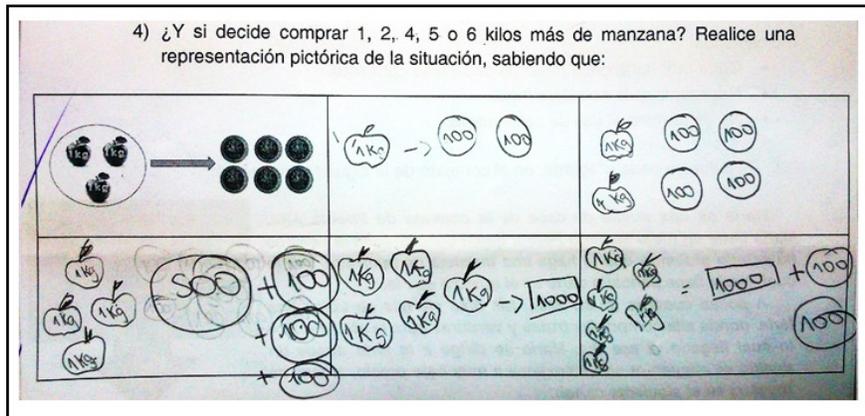


Figura 2. Evidencia de la pregunta 4, grupo A

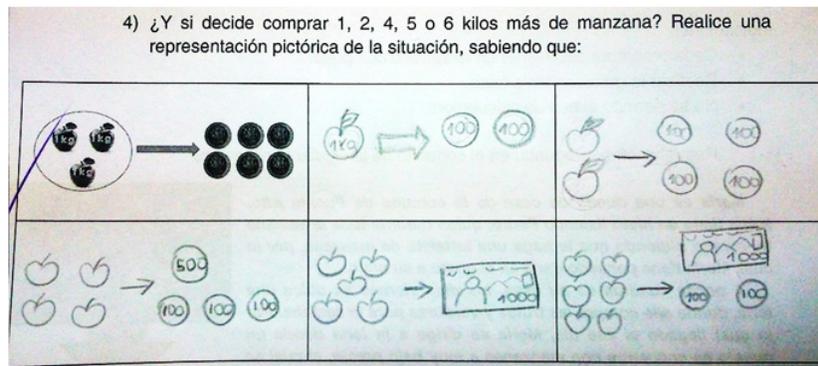


Figura 3. Evidencia de la pregunta 4, grupo B

En el ítem II, pregunta 1, entra en juego la creatividad de los estudiantes, quienes, en su mayoría, cumplieron con lo solicitado y se adaptaron a los valores de la tabla sugerida; no obstante, al menos dos de los grupos no tuvieron la creatividad suficiente para abordar el problema, ya que, como se puede ver en la figura 4 del grupo E, los estudiantes fuerzan el problema:

II. Aplicando lo aprendido de la función lineal.

1) Teniendo en cuenta la tabla adjunta de valores, plantee una situación que se ajuste a los datos.

Días	Dinero \$
0	0
2	6000
3	9000
5	15000
6	18000
8	24000
9	27000

Si Valen quiere ir a un concierto y ahora está juntando dinero. Si los 2 días siguientes juntan \$27.000. En cuánto días juntará \$27.000 si en 2 días juntó \$6000?

**Figura 4.** Evidencia de la pregunta 1, grupo E

A continuación, se presentarán dos evidencias de los logros obtenidos en esta pregunta del ítem II. Se hace referencia al nivel cognitivo que tiene el grupo F (fig. 5) con respecto al nivel cognitivo del grupo G (fig. 6), ya que, como se puede apreciar, el grupo F tiene un nivel cognitivo mayor que el del grupo G: los estudiantes del grupo F hacen referencia a la relación 1:3 sin ser evidenciado en la tabla sugerida, mientras que el grupo G hace la relación 2:6 con lo evidenciado:

II. Aplicando lo aprendido de la función lineal.

1) Teniendo en cuenta la tabla adjunta de valores, plantee una situación que se ajuste a los datos.

Días	litros
0	0
2	6
3	9
5	15
6	18
8	24
9	27

Un campesino se dirige a la municipalidad a buscar litros de agua para su terreno. Si cada Redón contiene 3 litros de agua.

**Figura 5.** Evidencia de la pregunta 1, grupo F

II. Aplicando lo aprendido de la función lineal.

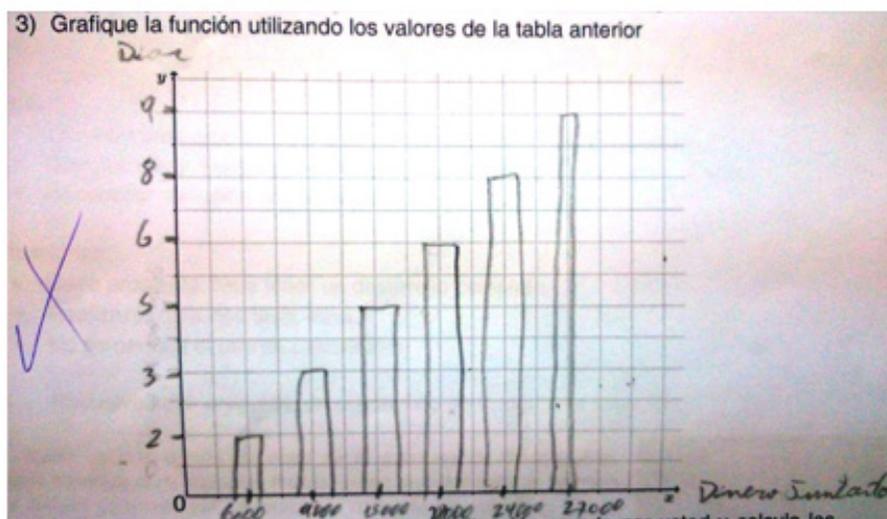
1) Teniendo en cuenta la tabla adjunta de valores, plantee una situación que se ajuste a los datos.

0	0
2	6
3	9
5	15
6	18
8	24
9	27

Si Carlos sale a correr y cada 6 minutos corre 2 cuadras.  
¿Cuántas cuadras corre en 24 minutos?

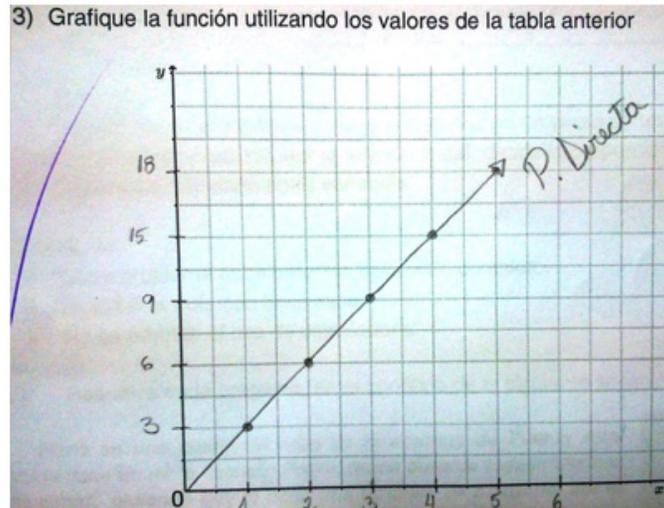
**Figura 6.** Evidencia de la pregunta 1, grupo G

Nuevamente al momento de modelar la función lineal en el plano cartesiano se encontraron 5 dificultades ontogenéticas, ya que los estudiantes no ubicaron bien las variables en el eje cartesiano, como lo evidencia el grupo H (fig. 7).



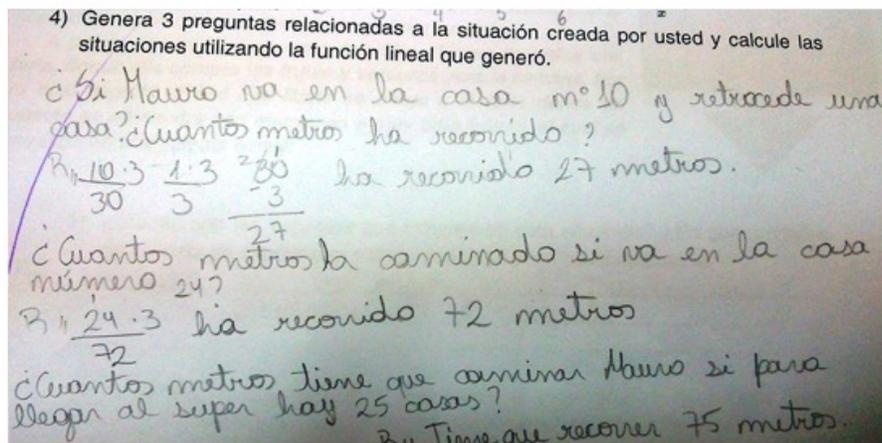
**Figura 7.** Evidencia de la pregunta 3, grupo H

Por otra parte, llama la atención que hayan hecho el gráfico en barras sabiendo que la gráfica es una línea; se entiende que el grupo no tiene suficiente nivel cognitivo al momento de expresar lo solicitado. No obstante, cabe destacar que el grupo D presenta un mayor nivel cognitivo, ya que indica que es una proporción directa, como muestra la figura 8. Así, logra asociar contenidos previos y genera aprendizajes significativos.



**Figura 8.** Evidencia de la pregunta 3, grupo D

En la pregunta 4 del ítem II, todos cumplieron con el objetivo de armar interrogantes con respecto a sus enunciados; salvo un grupo, que fue considerado en la dificultad ontogénica, ya que no tiene la noción completa del concepto valor absoluto y comete un error de cálculo al momento de responder su primera interrogante creada por sí mismos, como se puede evidenciar en la figura 9:



**Figura 9.** Evidencia de la pregunta 4

## 8 La confrontación de los análisis *a priori* y *a posteriori*

El objetivo mayor de esta investigación era poder avalar que la metodología de la modelación matemática unida con el registro de representaciones semióticas podría mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje con el contenido de función lineal. Desde el punto de vista de la aplicación que se hizo es posible mejorar el proceso, ya que los resultados fueron positivos; sin embargo, es claro que los alumnos aún no adquieren bien el contenido, por lo que se debe trabajar aún más en las clases futuras. Esto debe realizarse con la misma metodología, ya que así los estudiantes descubren el conocimiento en vez de solo recibirlo, lo aprenden de una mejor manera, se logra motivarlos y se vuelve algo propio de ellos. Gracias a eso, luego podrán manipular y utilizar el conocimiento en sucesos cotidianos y reconocerán instantes en la vida en los cuales puedan utilizar este objeto matemático. Además, se vieron desarrolladas bastantes habilidades, en especial la visualización, el cambio de registro, la aplicación, la resolución de problemas y la modelación, las que son habilidades que en el aula deben estar presentes en la asignatura de matemática según los profesores y hasta el currículo. Todo esto podemos verlo reflejado en los resultados expuestos en la matriz y en la recibida de los alumnos. Además de poder enseñarlo de forma eficaz, también se logró superar todo obstáculo que pudiera generar el trabajo con un solo registro y tener una clase expositiva, en general, una secuencia didáctica que fuera eficaz y lograra captar la atención e incentivar la participación de todos los alumnos. No se tuvo la clase expositiva, si no que ellos fueron partícipes de su aprendizaje y lograron desarrollar una actividad mucho más autónoma.

## Referencias bibliográficas

- ARRIETA J. Y DÍAZ L. (2015). “Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *RELI-ME*, 18(1), pp. 19-48.
- BASSANEZI R. Y BIEMBENGUT M. (1997) “Modelación matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza”. *Revista Didáctica de las Matemáticas*, 32.
- DÍAZ, V. Y PÉREZ, I. (2016). “Uso de gráficas en una situación de modelación del movimiento en matemática en la enseñanza secundaria en Chile”. *PARADIGMA*, 37(1), 161-180.
- LOZANO, M.; HAYE E.; MONTENEGRO F. Y CÓRDOBA, L. (2013). “Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas”. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe*. 6-8 de noviembre de 2013, Santo Domingo, República Dominicana.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2013). *Bases curriculares de 7.º a 2.º medio*.
- (2016). *Programas de Matemática de 7.º*. Disponible en: [http://www.curriculumlineamineduc.cl/605/articles-30013\\_recurso\\_17\\_09.pdf](http://www.curriculumlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_17_09.pdf)
- OVIDO, L. Y KANASHIRO, A. (2012). “Los registros de representación en matemática”. *Revista Aula Universitaria*, pp. 29-36.
- ROLDÁN, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8.º y 9.º grado de educación básica*. Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias, Bogotá, Colombia.
- SERGE, L. Y ALEU, H. (1976). *Cálculo II*.
- TEXTO ESCOLAR 2016, MATEMÁTICA I.º MEDIO. Chile: Editorial SM, p. 136.